



TITLE:

# 実グラスマン型の表現の分岐則と 安定性 (組合せ論的表現論とその応用)

AUTHOR(S):

塚本, 千秋

---

CITATION:

塚本, 千秋. 実グラスマン型の表現の分岐則と安定性 (組合せ論的表現論とその応用). 数理解析研究所講究録 2011, 1738: 58-68

ISSUE DATE:

2011-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170861>

RIGHT:

## 実グラスマン型の表現の分岐則と安定性

(Branching rules and their stabilities for real Grassmann pairs)

京都工芸繊維大学 工芸科学部 数理・自然部門

塚本 千秋 (Chiaki Tsukamoto)

Department of Mathematical and Physical Sciences

Kyoto Institute of Technology

### §1 序.

コンパクト等質空間  $M = G/K$  ( $G$  はコンパクト・リー群,  $K$  はその閉部分群) に関する幾何学を扱う際, 主束  $G \rightarrow G/K$  に付随するベクトル束  $E = G \times_K V_K$  ( $V_K$  は既約  $K$ -module) の  $C^\infty$ -sections の空間  $C^\infty(E)$  が  $G$ -module としてどのような既約  $G$ -modules の直和に分解するかを求めたいことがある. Frobenius の reciprocity law を用いると, それは既約  $G$ -module が, 作用を  $K$  に制限したとき, どのような既約  $K$ -modules の直和に分解するか, という「分岐則」を調べることに帰着する.

実際,  $C^\infty(E)$  は  $G$  上の  $V_K$ -値  $C^\infty$  関数全体のなす  $G$ -module  $C^\infty(G; V_K)$  の  $G$ -submodule  $C^\infty(G, K; V_K)$ :

$$C^\infty(G, K; V_K) = \{ f \in C^\infty(G; V_K) \mid f(gk) = k^{-1} \cdot f(g) \quad (g \in G, k \in K) \}$$

と同一視され, その  $G$ -module としての既約分解を知るには,  $G$  の各既約  $G$ -module  $V_G$  から  $C^\infty(G, K; V_K)$  への  $G$ -homomorphisms の全体  $\text{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K))$  が分かれば良い.  $\text{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K))$  の元  $\Phi$  に対して  $V_G$  から  $V_K$  への  $K$ -homomorphisms 全体  $\text{Hom}_K(V_G, V_K)$  の元  $\Psi$  を  $\Psi(v) = (\Phi(v))(e)$  ( $v \in V_G$ ,  $e$  は  $G$  の単位元) により対応させると, 同型:

$$\text{Hom}_G(V_G, C^\infty(G, K; V_K)) \cong \text{Hom}_K(V_G, V_K)$$

が得られる. これが Frobenius' reciprocity law である. Schur's Lemma から  $V_G$  の  $K$ -module としての既約分解中に既約  $K$ -module  $V_K$  が存在す

るときにのみ  $\text{Hom}_K(V_G, V_K)$  は  $\{0\}$  でなく、その次元は既約分解中の  $V_K$  の重複度与えられる。

勿論、 $V_K$  が自明な  $K$ -module  $\mathbf{C}$  のときの結果は、「球関数」の理論として知られていて、この場合は分岐則は必要ではない。既約  $G$ -module  $V_G$  はその最高重みで指定できるのであるが、それが基本重みの非負整数係数の一次結合である場合にのみ  $\dim \text{Hom}_K(V_G, \mathbf{C}) = 1$  となり、そうでなければ  $\text{Hom}_K(V_G, \mathbf{C}) = \{0\}$  である。又 Laplacian の作用は  $C^\infty(G/K)$  の各既約  $G$ -submodule において、Casimir 作用素と定数倍を除いて一致し、その作用は最高重みから計算される定数倍であり、各既約  $G$ -submodule の次元も Weyl の公式で計算されるので、 $C^\infty(G/K)$  の Laplacian の Spectrum (固有値とその重複度) は、分岐則に関係なく、計算できるわけである。

しかし、例えば  $C^\infty(E)$  が微分形式の空間等になると分岐則が必要となる。池田章・谷口義治 [1] はコンパクト対称空間の微分形式の空間に作用する Laplacian が、やはり Casimir 作用素の定数倍になることを示し、球面  $SO(n+1)/SO(n)$  と複素射影空間  $U(n+1)/U(1) \times U(n)$  の場合に Laplacian の Spectrum を求めた。そこでは対称対  $(SO(2m+1), SO(2m))$ ,  $(SO(2m+2), SO(2m+1))$ ,  $(SU(n+1), S(U(1) \times U(n)))$  についての分岐則が古典的に良く知られていたことが鍵となったのである。

往時、筆者は両氏の示唆を受けて、四元数射影空間  $Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$  の微分形式の空間に作用する Laplacian の Spectrum の計算を研究し始めた。実は、Lepowsky 氏が [2] で  $(Sp(n+1), Sp(1) \times Sp(n))$  の分岐則を与えていることも教えていただいたのである。(但し、微分形式の空間を与える  $K$ -module を既約な  $K$ -modules に分解しておかないと分岐則が適用できないわけで、その部分の計算が肝心ののだが、それは別のお話になるので、省略する。) 問題は、分岐則自体は不思議に纏まった形をしているのに、その証明が複雑で、follow する気にもなれないものであったことである。そこでその別証明を試みたのが、このお話の始まりである。

## §2 分岐則.

コンパクト対称対  $(G, K)$  に対して、 $K$  の極大トーラス群  $T'$  を含むように  $G$  の極大トーラス群  $T$  を取る。最高重み  $\Lambda_G$  を持つ既約  $G$ -module  $V_G(\Lambda_G)$  の指標を  $\chi_G(\Lambda_G)$  としよう。  $\chi_G(\Lambda_G)$  を  $T$  上の関数と考えたと

き, それを  $T'$  に制限したものがどのような最高重み  $\Lambda_K$  をもつ既約  $K$ -modules  $V_K(\Lambda_K)$  の指標  $\chi_K(\Lambda_K)$  の和として書かれるか, を調べれば, 分岐則は定まる. つまり,  $D(K)$  で  $K$  の既約な表現の同値類の全体, 或いはそれらに対応する最高重み (dominant weights) の全体を表すとき,

$$\chi_G(\Lambda_G)|_{T'} = \sum_{\Lambda_K \in D(K)} m(\Lambda_G, \Lambda_K) \chi_K(\Lambda_K) \quad (2.1)$$

となる係数  $m(\Lambda_G, \Lambda_K)$  が  $\dim \text{Hom}_K(V_G(\Lambda_G), V_K(\Lambda_K))$  である.

Weyl の指標公式により, 指標は交代指標の商として表される.  $G$  の Weyl 群を  $W_G$  とし, その元  $w \in W_G$  の符号を  $\text{sgn}(w)$  とするとき, 重み  $\Lambda$  の交代指標  $\xi_G(\Lambda)$  を

$$\xi_G(\Lambda) = \sum_{w \in W(G)} \text{sgn}(w) e^{w \cdot \Lambda}$$

とする.  $G$  の正のルートの全体を  $\Delta_G^+$  とし,  $\delta_G = (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta_G^+} \alpha$  とおくとき,

$$\chi_G(\Lambda_G) = \xi_G(\Lambda_G + \delta_G) / \xi_G(\delta_G)$$

となる. ここで

$$\xi_G(\delta_G) = \prod_{\alpha \in \Delta_G^+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2))$$

となっている.  $\chi_K(\Lambda_K)$  も同じように定義された交代指標  $\xi_K(\Lambda)$  で表されるから, (2.1) は

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_G(\Lambda_G + \delta_G)}{\prod_{\alpha \in \Delta_G^+ \setminus \Delta_K^+} (\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2))} \Big|_{T'} \\ &= \sum_{\Lambda_K \in D(K)} m(\Lambda_G, \Lambda_K) \xi_K(\Lambda_K + \delta_K) \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる. ( $\Delta_G^+ \setminus \Delta_K^+$  の所は  $T'$  に制限して入らないものという読み替えが必要な場合がある.)

$\xi_K(\Lambda_K + \delta_K)$  らは一次独立なので, 一つの  $\Lambda_G \in D(G)$  に対して, 既約  $G$ -module  $V_G(\Lambda_G)$  の既約  $K$ -modules への分岐を調べたいのであれば, 数式処理ソフトを用いて (2.2) を計算することも可能である.

しかし,  $C^\infty(E)$  の既約  $G$ -modules への分解を求める立場からは, 定まった  $\Lambda_K \in D(K)$  に対して,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) > 0$  となる  $\Lambda_G \in D(G)$  の全体を知らなければならない. それには  $m(\Lambda_G, \Lambda_K)$  が  $\Lambda_G$  と  $\Lambda_K$  からどのように決定されるのかが分かりやすく示されていないといけない.

古典型単純 Lie 群の場合は, 重みの基底  $\{\lambda_i\}$  を用いて, 交代指標が行列式で表される.

$$\xi_{U(n)}(\Lambda) = \det(\exp(h_i \lambda_j))$$

$$\xi_{SO(2m+1)}(\Lambda) = \det(\exp(h_i \lambda_j) - \exp(-h_i \lambda_j))$$

$$\begin{aligned} \xi_{SO(2m)}(\Lambda) = \frac{1}{2} & \left( \det(\exp(h_i \lambda_j) + \exp(-h_i \lambda_j)) \right. \\ & \left. + \epsilon \det(\exp(h_i \lambda_j) - \exp(-h_i \lambda_j)) \right) \end{aligned}$$

$$\xi_{Sp(n)}(\Lambda) = \det(\exp(h_i \lambda_j) - \exp(-h_i \lambda_j))$$

(2.2) の左辺の計算はこのような行列式のいくつかのルート  $\alpha$  に対応する  $\exp(\alpha/2) - \exp(-\alpha/2)$  の形の式での割り算を実行することになる. 古典的に知られていた場合というのはそれが簡単に出来て, しかもそれを行列式の和として書くことが容易な場合であった. Lepowsky 氏の計算は行列式を表に出さず, 複雑な場合分けを含むものであったが, 同じことを割り算,

$$\frac{\det(\exp(h_i \lambda_j) - \exp(-h_i \lambda_j))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}}{\prod_{j=1}^n \left( \frac{(\exp((\lambda_0 + \lambda_j)/2) - \exp(-(\lambda_0 + \lambda_j)/2))}{(\exp((\lambda_0 - \lambda_j)/2) - \exp(-(\lambda_0 - \lambda_j)/2))} \right)}$$

を実行して求められないだろうかと考えた. その結果, 次の定理の別証明を得ることが出来た.

**定理 2.1 (Lepowsky [2]).**  $\Lambda_{Sp(n+1)} = h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + \cdots + h_n \lambda_n$  (但し, 整数  $h_i$  は  $h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_n \geq 0$  を満たす) と  $\Lambda_{Sp(1) \times Sp(n)} = k_0 \lambda_0 + k_1 \lambda_1 + \cdots + k_n \lambda_n$  (但し, 整数  $k_i$  は  $k_0 \geq 0, k_1 \geq \cdots \geq k_n \geq 0$  を満たす) について,  $m(\Lambda_{Sp(n+1)}, \Lambda_{Sp(1) \times Sp(n)}) > 0$  となるのは,

$$h_{i-1} \geq k_i \geq h_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad h_{n-1} \geq k_n \geq 0,$$

であり,

$$\begin{aligned}\ell_0 &= h_0 - \max(h_1, k_1), \\ \ell_i &= \min(h_i, k_i) - \max(h_{i+1}, k_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \ell_n &= \min(h_n, k_n),\end{aligned}\tag{2.3}$$

とおくとき,

$$(X - X^{-1})^{-n} \prod_{i=0}^n (X^{\ell_i+1} - X^{-\ell_i-1}) = \sum_{k \geq 0} m_k (X^{k+1} - X^{-k-1})$$

の展開における  $m_{k_0}$  が正となるときである. そのとき,  $m_{k_0} = m(\Lambda_{Sp(n+1)}, \Lambda_{Sp(1) \times Sp(n)})$  である.

幸いなことに, この場合と同様の計算によって,  $(SO(2m+2), SO(2) \times SO(2m))$  と  $(SO(2m+3), SO(2) \times SO(2m+1))$  の分岐則も与えることが出来た.

**定理 2.2 ([6]).**  $\Lambda_{SO(2m+2)} = h_0 \lambda_0 + h_1 \lambda_1 + \cdots + h_{m-1} \lambda_{m-1} + \epsilon h_m \lambda_m$  (但し, 整数  $h_i$  は  $h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_{m-1} \geq h_m \geq 0$  を満たし,  $\epsilon = \pm 1$ ) と  $\Lambda_{SO(2) \times SO(2m)} = k_0 \lambda_0 + k_1 \lambda_1 + \cdots + k_{m-1} \lambda_{m-1} + \epsilon' k_m \lambda_m$  (但し, 整数  $k_i$  は  $k_1 \geq \cdots \geq k_{m-1} \geq k_m \geq 0$  を満たし,  $\epsilon' = \pm 1$ ) について,  $m(\Lambda_{SO(2m+2)}, \Lambda_{SO(2) \times SO(2m)}) > 0$  となるのは,

$$h_{i-1} \geq k_i \geq h_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad h_{m-1} \geq k_m \geq 0,$$

であり,

$$\begin{aligned}\ell_0 &= h_0 - \max(h_1, k_1), \\ \ell_i &= \min(h_i, k_i) - \max(h_{i+1}, k_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq m-1), \\ \ell_m &= \min(h_m, k_m),\end{aligned}\tag{2.4}$$

とおくとき,

$$(X - X^{-1})^{-m} X^{\epsilon \ell_m} \prod_{i=0}^{m-1} (X^{\ell_i+1} - X^{-\ell_i-1}) = \sum_k m_k X^k$$

の展開における  $m_{k_0}$  が正となるときである. そのとき,  $m_{k_0} = m(\Lambda_{SO(2m+2)}, \Lambda_{SO(2) \times SO(2m)})$  である.

**定理 2.3 ([6]).**  $\Lambda_{SO(2m+3)} = h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_m\lambda_m$  (但し, 整数  $h_i$  は  $h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$  を満たす) と  $\Lambda_{SO(2) \times SO(2m+1)} = k_0\lambda_0 + k_1\lambda_1 + \cdots + k_m\lambda_m$  (但し, 整数  $k_i$  は  $k_1 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$  を満たす) について,  $m(\Lambda_{SO(2m+3)}, \Lambda_{SO(2) \times SO(2m+1)}) > 0$  となるのは,

$$h_{i-1} \geq k_i \geq h_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad h_{m-1} \geq k_m \geq 0,$$

であり,  $\ell_i$  ( $0 \leq i \leq m$ ) を (2.4) で定義するとき,

$$\frac{X^{\ell_m+1/2} - X^{-\ell_m-1/2}}{X^{1/2} - X^{-1/2}} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{X^{\ell_i+1} - X^{-\ell_i-1}}{X - X^{-1}} = \sum_k m_k X^k$$

の展開における  $m_{k_0}$  が正となるときである. そのとき,  $m_{k_0} = m(\Lambda_{SO(2m+3)}, \Lambda_{SO(2) \times SO(2m+1)})$  である.

$(G, K) = (SO(n+1), SO(n))$  や  $(U(n+1), U(1) \times U(n))$  のときは  $m(\Lambda_G, \Lambda_K)$  は高々 1 であり, 殆ど  $h_i$  らと  $k_i$  らが満たす不等式だけで  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) = 1$  となる場合が決定できるのであるが,  $(G, K) = (Sp(n+1), Sp(1) \times Sp(n))$  や  $(SO(n+2), SO(2) \times SO(n))$  のときは,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K)$  が 1 ではない場合がでてくる.  $m(\Lambda_G, \Lambda_K)$  の決定には  $\ell_i$  のような量が必要とされるわけである. 行列式の計算からは  $\ell_i$  は自然とでてくるのであるが,  $\ell_i$  を導入すると分岐の重複度が表せることを見抜いた Lepowsky 氏がいたからそういう計算が出来たと言うのが本当のところである.

これらの定理を用いて [6] で四元数射影空間と複素二次超曲面の微分形式の空間に作用する Laplacian の Spectrum が計算できることを示せたのであった. 更に, 標準計量で考えると, 球面上の測地線, 即ち大円, の全体のなす多様体は複素二次超曲面と等長であるので, 定理 2.2, 2.3 を, 全ての測地線が同じ長さの閉測地線になっているという性質を保つ球面上の標準計量の変形 (Zoll 変形) の研究にも応用することが出来た [7]. それは球面上の関数に対して, その関数の大円での平均をその大円での値とする大円全体のなす多様体上の関数を対応させる, Radon 変換の類似物 (Funk 変換) の研究とも結びついている. 高階の Grassmann 多様体上への Radon 変換

の類似物の研究まで視野に入れると,  $(SO(m+n), SO(m) \times SO(n))$  についての分岐則で使いやすいものがほしい.

§3  $(SO(n+3), SO(3) \times SO(n))$ .

$(SO(n+2), SO(2) \times SO(n))$  を一歩進めて,  $(SO(n+3), SO(3) \times SO(n))$  の分岐則を導くのは, 導くだけなら,それほど難しくない. 次のようになる.

**定理 3.1 ([8]).**  $G = SO(2m+3)$ ,  $K = SO(3) \times SO(2m)$  ( $m \geq 2$ ) のとき,  $\Lambda_G = h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_m\lambda_m$  (但し, 整数  $h_i$  は  $h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_m \geq 0$  を満たす) と  $\Lambda_K = p_0\lambda_0 + p_1\lambda_1 + \cdots + p_{m-1}\lambda_{m-1} + \epsilon p_m\lambda_m$  (但し, 整数  $p_i$  は  $p_0 \geq 0, p_1 \geq \cdots \geq p_{m-1} \geq p_m \geq 0$  を満たし,  $\epsilon = \pm 1$ ) について,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) > 0$  となるのは,

$$h_{i-1} \geq p_i \geq h_{i+2} \quad (1 \leq i \leq m-2), \quad h_{m-2} \geq p_{m-1}, \quad h_{m-1} \geq p_m,$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_m)} \left( (X^{\ell_m+1/2} - X^{-\ell_m-1/2}) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{X^{\ell_i+1} - X^{-\ell_i-1}}{X - X^{-1}} \right) \\ = \sum_{p \geq 0} m_p (X^{p+1/2} - X^{-p-1/2}), \end{aligned}$$

の展開における  $m_{p_0}$  が正となるときである. 但し, 和は, 整数  $k_i$  で

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0,$$

$$h_0 \geq k_1 \geq \max(p_1, h_2),$$

$$\min(p_{i-1}, h_{i-1}) \geq k_i \geq \max(p_i, h_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq m-1),$$

$$\min(p_{m-1}, h_{m-1}) \geq k_m \geq p_m,$$

を満たすものの全ての組について取り,  $\ell_i$  は

$$\ell_0 = h_0 - \max(h_1, k_1),$$

$$\ell_i = \min(h_i, k_i) - \max(h_{i+1}, k_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$\ell_m = \min(h_m, k_m),$$

で定める. このとき,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) = m_{p_0}$  である.

**定理 3.2 ([8]).**  $G = SO(2m+4)$ ,  $K = SO(3) \times SO(2m+1)$  ( $m \geq 1$ ) のとき,  $\Lambda_G = h_{-1}\lambda_{-1} + h_0\lambda_0 + h_1\lambda_1 + \cdots + h_{m-1}\lambda_{m-1} + \epsilon h_m\lambda_m$  (但し, 整



数  $h_i$  は  $h_{-1} \geq h_0 \geq h_1 \geq \cdots \geq h_{m-1} \geq h_m \geq 0$  を満たし,  $\epsilon = \pm 1$ ) と  $\Lambda_K = p_{-1}\lambda_{-1} + p_1\lambda_1 + \cdots + p_{m-1}\lambda_{m-1} + p_m\lambda_m$  (但し, 整数  $p_i$  は  $p_{-1} \geq 0, p_1 \geq \cdots \geq p_{m-1} \geq p_m \geq 0$  を満たす) に対して,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) > 0$  となるのは,

$$h_{i-2} \geq p_i \geq h_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad h_{m-2} \geq p_m,$$

であり,

$$\begin{aligned} \sum_{(q_0, q_1, \dots, q_m)} \left( (X^{r_m+1/2} - X^{-r_m-1/2}) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{X^{r_i+1} - X^{-r_i-1}}{X - X^{-1}} \right) \\ = \sum_{p \geq 0} m_p (X^{p+1/2} - X^{-p-1/2}), \end{aligned}$$

の展開における  $m_{p_{-1}}$  が正となるときである. 但し, 和は, 整数  $q_i$  で,

$$q_0 \geq q_1 \geq \cdots \geq q_m \geq 0,$$

$$h_{-1} \geq q_0 \geq \max(p_1, h_0),$$

$$h_0 \geq q_1 \geq \max(p_2, h_1),$$

$$\min(p_{i-1}, h_{i-1}) \geq q_i \geq \max(p_{i+1}, h_i) \quad (2 \leq i \leq m-1),$$

$$\min(p_{m-1}, h_{m-1}) \geq q_m \geq h_m,$$

を満たすものの全ての組について取り,  $r_i$  は

$$r_0 = q_0 - \max(q_1, p_1),$$

$$r_i = \min(q_i, p_i) - \max(q_{i+1}, p_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$r_m = \min(q_m, p_m),$$

により定める. このとき,  $m(\Lambda_G, \Lambda_K) = m_{p_{-1}}$  である.

当初この二つの定理は使えないもののように思って放置していた. 例えば, 球関数の理論によれば, 定理 3.1 において  $m(\Lambda_G, 0) > 0$  となるのは,  $\Lambda_G$  が基本重み  $\Lambda_1 = 2\lambda_0, \Lambda_2 = 2\lambda_0 + 2\lambda_1, \Lambda_3 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$  の非負整数係数の一次結合  $\Lambda_0 = s_1\Lambda_1 + s_2\Lambda_2 + s_3\Lambda_3$  のときで, 更に  $m(\Lambda_0, 0) = 1$  となるわけだが, それを見て取るのも容易ではない.

しかし, 球関数の理論の内容を再現できないか, 色々計算しているうちに, 少しずつ左辺の和の扱い方に慣れてきて, 定理 3.1, 3.2 の各場合に, そ

れを導くことが出来た. 全く使えないわけではないとすれば, 何に使うのが良いだろうか.

#### §4 分岐の安定性.

幾何学に応用可能な分岐則, それも例外型対称空間の場合を間下克哉氏が色々と研究している [3][4]. そこでは微分形式の空間の Laplacian の Spectrum の計算がどのように可能であるか, というもののほかに, 分岐の安定性についての評価の問題が取り上げられている.

ベクトル束の切断の空間  $C^\infty(E)$  は, 切断を関数倍するということが可能であるから,  $C^\infty(G/K)$ -module としての構造を備えている. 対称対  $(G, K)$  の基本重みを  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  ( $r = \text{rank}(G/K)$ ) とし, 非負整数  $s_i$  について,  $\Lambda_0 = \sum_{i=1}^r s_i \Lambda_i$  であるとする.  $\dim \text{Hom}_G(V_G(\Lambda_0), C^\infty(G/K)) = 1$  であるから,  $V_G(\Lambda_0)$  内の最高重み  $\Lambda_0$  に対応する  $C^\infty(G/K)$  の零でない元が定数倍を除いて定まる. 任意の  $\Lambda_G \in D(G)$  に対して,  $\text{Hom}_G(V_G(\Lambda_G), C^\infty(E))$  の元は  $\text{Hom}_G(V_G(\Lambda_G) \otimes V_G(\Lambda_0), C^\infty(E))$  の元を定め, 又  $V_G(\Lambda_G) \otimes V_G(\Lambda_0) \subset V_G(\Lambda_G + \Lambda_0)$  であるから,  $\text{Hom}_G(V_G(\Lambda_G + \Lambda_0), C^\infty(E))$  の元を定める. 具体的には零でない関数を掛けることに対応している,  $\text{Hom}_G(V_G(\Lambda_G), C^\infty(E))$  から  $\text{Hom}_G(V_G(\Lambda_G + \Lambda_0), C^\infty(E))$  への写像は injective であり,  $E$  が  $V_K = V_K(\Lambda_K)$  に付随するベクトル束であるとすれば,

$$m(\Lambda_G, \Lambda_K) \leq m(\Lambda_G + \Lambda_0, \Lambda_K)$$

が成立していることになる. 更に, ここで現れる modules は全てたちの良いものであって, いつでも有限生成であるということから, 十分に大きな  $\Lambda_G$  に対しては,

$$m(\Lambda_G, \Lambda_K) = m(\Lambda_G + \Lambda_0, \Lambda_K) \quad (4.1)$$

が任意の  $\Lambda_0$  について成立するという「安定性」があることが佐藤文広氏の [5] で証明されている. 但し, どの位大きな  $\Lambda_G$  であれば (4.1) が成立するか, という  $\Lambda_G$  についての評価は, その証明からは明らかではない.

分岐則が幾何学的応用においてどの位使いやすいものであるかの一つの基準として, 安定性が成立する領域の具体的な評価ができるかどうかを取り上げてはどうかというのが間下氏の提案である. この観点からは, 定理

3.1, 3.2 の結果は, 計算への習熟を前提とすれば, ある程度評価できるものである.

定理 3.1 の場合の基本重みについては既に述べた.

定理 4.1 ([9]). 定理 3.1 の  $\Lambda_G, \Lambda_K$  について,  $h_0 - h_1 \geq p_0 + p_1, h_1 - h_2 \geq p_0 + p_1$ , かつ  $h_2 \geq p_1$  であれば, 任意の  $\Lambda_0$  について (4.1) が成立する.

定理 3.2 の場合,  $m \geq 2$  のときの基本重みは  $\Lambda_1 = 2\lambda_{-1}, \Lambda_2 = 2\lambda_{-1} + 2\lambda_0, \Lambda_3 = \lambda_{-1} + \lambda_0 + \lambda_1$  であるが,  $m = 1$  のときの基本重みは  $\Lambda_1 = 2\lambda_{-1}, \Lambda_2 = \lambda_{-1} + \lambda_0 + \lambda_1, \Lambda_3 = \lambda_{-1} + \lambda_0 - \lambda_1$  となるので, 結果は別に述べる.

定理 4.2 ([9]).  $m \geq 2$  とすれば, 定理 3.2 の  $\Lambda_G, \Lambda_K$  について,  $h_{-1} - h_0 \geq p_{-1} + p_1, h_0 - h_1 \geq p_{-1} + p_1$ , かつ  $h_1 \geq p_1$  であれば, 任意の  $\Lambda_0$  について (4.1) が成立する.

定理 4.3 ([9]).  $m = 1$  とすれば, 定理 3.2 の  $\Lambda_G, \Lambda_K$  について,  $h_{-1} - h_0 \geq p_{-1} + p_1, h_0 - h_1 \geq p_{-1} + p_1$ , かつ  $h_0 \geq (3/2)(p_{-1} + p_1)$  であれば, 任意の  $\Lambda_0$  について (4.1) が成立する.

## §5 結語.

とは言え, 定理 3.1, 3.2 は使い難い. 幾何学的な問題に適用しようとするれば, 場合場合に応じた補題を沢山用意する必要があるだろう. 組み合わせ論的な考察を加えることにより, 予め左辺の和を分かりやすい形にまとめることはできないだろうか.

それがうまく出来ないようでは  $(SO(n+4), SO(4) \times SO(n))$  の使いやすいつ岐則は構成し難いかも知れない.

一方では,  $(SO(n+4), SO(2) \times SO(n+2))$  への分解は良いものであるし, 更に  $(SO(n+4), SO(2) \times SO(2) \times SO(n+2))$  への分解も同様に出来るのであるから, それから逆に  $SO(2) \times SO(2)$  の表現の部分をやうまく  $SO(4)$  の表現にまとめ上げて,  $(SO(n+4), SO(4) \times SO(n))$  の良い分岐則が先に得られるような気もしないではない.

同じようなことは  $U(n), Sp(n)$  についても言える.  $U(n)$  の表現を  $U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1)$  の表現まで分解して議論することは随分行わ

れているようだが, 例えば  $(U(n+2), U(2) \times U(n))$  の分岐則を,  $(U(n+2), U(1) \times U(1) \times U(n))$  の分岐則における  $U(1) \times U(1)$  の表現の部分を  $U(2)$  の表現にまとめ上げて, 使いやすい形のものとして手に入れることはできないだろうか.  $(Sp(n+2), Sp(2) \times Sp(n))$  の分岐則はどうだろうか.

- [1] Ikeda, A. & Taniguchi, Y.: Spectra and eigenforms of the Laplacians on  $S^n$  and  $P^n(C)$ , Osaka J. Math., **15** (1978), 515–546.
- [2] Lepowsky, J.: Multiplicity formula for certain semisimple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 601–605.
- [3] Mashimo, K.: On branching theorem of the pair  $(G_2, SU(3))$ , Nihonkai Math. J., **8** (1997), 101–107.
- [4] Mashimo, K.: On the branching theorem of the pair  $(F_4, Spin(9))$ , Tsukuba J. Math., **30** (2006), 31–47.
- [5] Sato, F.: On the stability of branching coefficients of rational representations of reductive groups, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **42** (1993), 189–207.
- [6] Tsukamoto, C.: Spectra of Laplace-Beltrami operators on  $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$  and  $Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$ , Osaka J. Math., **18** (1981), 407–426.
- [7] Tsukamoto, C.: Integrability of infinitesimal Zoll deformations, Advanced Studies in Pure Mathematics "Geometry of Geodesics and Related Topics", bf 3 (1984), 97–104, Kinokuniya and North-Holland.
- [8] Tsukamoto, C.: Branching rules for  $SO(n+3)/SO(3) \times SO(n)$ , Bulletin of the Faculty of Textile Science, Kyoto Institute of Technology, **30** (2006), 11–20.  
<<http://hdl.handle.net/10212/1686>>
- [9] Tsukamoto, C.: Stability in  $SO(n+3)/SO(3) \times SO(n)$  branching, Tsukuba J. of Math., **33** (2009), 239–251.

mailto: chiaki@kit.ac.jp